

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТМ-ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СЛОЕ ИЗ НЕЛИНЕЙНОГО МЕТАМАТЕРИАЛА<sup>1</sup>

*Аннотация.* Изучается распространение ТМ-поляризованных электромагнитных волн в диэлектрическом слое из нелинейного метаматериала. Слой расположен между двумя изотропными немагнитными полупространствами с постоянными электродинамическими характеристиками. Получено дисперсионное уравнение для постоянных распространения ТМ-поляризованных электромагнитных волн в слое.

*Ключевые слова:* нелинейная краевая задача на собственные значения для системы уравнений Максвелла, дисперсионное уравнение, нелинейный слой, нелинейный метаматериал.

*Abstract.* The electromagnetic problem of propagation of TM-waves in a dielectric layer filled nonlinear metamaterial is considered. The layer is between two isotropic, nonmagnetic half-spaces with constant electrodynamic parameters. Dispersion equation for eigenvalues (propagation's constants) of the problem is obtained.

*Keywords:* nonlinear boundary eigenvalue problem for Maxwell equations, dispersion equation, nonlinear slab (film), nonlinear metamaterial.

Метаматериалы исследуются очень активно уже несколько лет. По этой тематике можно найти множество работ как российских ученых (см., например, [1–4] и библиографию там), так и их зарубежных коллег [5–7]. Однако, несмотря на большое количество работ по исследованию метаматериалов, эти работы касаются только линейных метаматериалов. В настоящей работе мы рассматриваем нелинейный метаматериал. А именно рассматривается распространение ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном диэлектрическом слое. Слой может быть заполнен метаматериалом.

Данная работа продолжает исследования авторов [8–11] по задачам распространения электромагнитных волн в нелинейных волноведущих структурах. Полученное в работе дисперсионное уравнение справедливо для произвольных действительных значений электродинамических параметров и коэффициента нелинейности. Полученное уравнение позволяет исследовать распространение электромагнитных волн в *нелинейных метаматериалах*. Ранее полученное дисперсионное уравнение в силу некоторых ограничений, которые будут обсуждаться позднее, не позволяло изучать метаматериалы. Вопросы распространения электромагнитных волн в нелинейных волноведущих структурах уже долгое время привлекают внимание исследователей (обзор и библиографию см., например, в работах [8–13]).

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим электромагнитные волны, проходящие через однородный, изотропный, немагнитный диэлектрический слой с нелинейностью типа Кер-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке гранта Минобрнауки РФ по ФЦП «Развитие потенциала высшей школы» № 2.1.1/1647.

ра, расположенный между двумя полупространствами  $x < 0$  и  $x > h$  в декартовой системе координат  $Oxyz$ . Полупространства заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_3$  соответственно ( $\epsilon_1$  и  $\epsilon_3$  – произвольные действительные числа). Считаем, что всюду  $\mu = \mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума.

Электрическое поле гармонически зависит от времени  $t$ :

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}_+(x, y, z)\cos\omega t + \mathbf{E}_-(x, y, z)\sin\omega t ;$$

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \mathbf{H}_+(x, y, z)\cos\omega t + \mathbf{H}_-(x, y, z)\sin\omega t ,$$

удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\epsilon\mathbf{E}, \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_+(x, y, z) + i\mathbf{E}_-(x, y, z), \mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{H}_+(x, y, z) + i\mathbf{H}_-(x, y, z)$$

есть комплексные амплитуды [14].

Диэлектрическая проницаемость внутри слоя описывается законом Керра  $\epsilon = \epsilon_2 + a|\mathbf{E}|^2$ , где  $a$  и  $\epsilon_2$  – произвольные действительные числа. Будем искать решение уравнений Максвелла во всем пространстве. Временной множитель везде ниже опущен.

Электромагнитное поле  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  удовлетворяет уравнениям Максвелла (1), условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границе раздела сред  $x = 0$ ,  $x = h$  и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле экспоненциально затухает при  $|x| \rightarrow \infty$  в областях  $x < 0$  и  $x > h$ .

Рассмотрим ТМ-поляризованные волны  $\mathbf{E} = \{E_x, 0, E_z\}$ ,  $\mathbf{H} = \{0, H_y, 0\}$ . Из системы (1) получаем, что  $\frac{\partial E_z}{\partial y} = 0$  и  $\frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$ , следовательно,  $E_z = E_z(x, z)$  и  $E_x = E_x(x, z)$  не зависят от  $y$ . Поскольку  $H_y$  выражается через  $E_x$  и  $E_z$ , то  $H_y$  также не зависит от  $y$ . Обозначая  $\frac{\partial}{\partial x} \equiv (\dots)'$  и, предполагая, что компоненты поля гармонически зависят от  $z$ :  $H_y(x, z) = H_y(x)e^{i\gamma z}$ ,  $E_x(x, z) = E_x(x)e^{i\gamma z}$ ,  $E_z(x, z) = E_z(x)e^{i\gamma z}$ , получаем систему уравнений

$$\begin{cases} i\gamma E_x(x) - E_z'(x) = i\omega\mu H_y(x), \\ H_y'(x) = -i\omega\epsilon E_z(x), \\ i\gamma H_y(x) = i\omega\epsilon E_x(x), \end{cases} \quad (2)$$

из которой следует, что

$$H_y(x) = \frac{1}{i\omega\mu} (i\gamma E_x(x) - E'_z(x)), \quad (3)$$

здесь  $\gamma$  – неизвестный спектральный параметр – постоянная распространения электромагнитной волны.

Дифференцируя выражение (3) и используя второе и третье уравнения системы (2), получим

$$\begin{cases} \gamma(iE_x(x))' - E'_z(x) = \omega^2 \varepsilon \mu E_z(x), \\ \gamma^2(iE_x(x)) - \gamma E'_z(x) = \omega^2 \varepsilon \mu (iE_x(x)). \end{cases} \quad (4)$$

Введем обозначения  $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_0$ , с  $\mu = \mu_0$  и выполним нормировку в соответствии с формулами  $\tilde{x} = kx$ ,  $\frac{d}{dx} = k \frac{d}{d\tilde{x}}$ ,  $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{k}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_j = \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0}$  ( $j = 1, 2, 3$ ),  $\tilde{a} = \frac{a}{\varepsilon_0}$ . Переобозначаем  $E_z \equiv Z(\tilde{x})$ ,  $iE_x \equiv X(\tilde{x})$  и, опуская значок тильды, систему (4) приведем к виду

$$\begin{cases} -Z'' + \gamma X' = \varepsilon Z, \\ -\gamma Z' + \gamma^2 X = \varepsilon X. \end{cases} \quad (5)$$

Будем искать действительные решения  $X(x)$ ,  $Z(x)$  для системы (5), полагая  $\gamma$  действительным (так что  $|\mathbf{E}|^2$  не зависит от  $z$ ), где

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, x < 0, \\ \varepsilon_2 + a(X^2 + Z^2), 0 < x < h, \\ \varepsilon_3, x > h. \end{cases} \quad (6)$$

Также будем полагать, что функции  $X(x)$ ,  $Z(x)$  дифференцируемы в слое так, что

$$\begin{aligned} X(x) &\in C(-\infty; 0] \cap C[0; h] \cap C[h; +\infty) \cap C^1(-\infty; 0] \cap C^1[0; h] \cap C^1[h; +\infty); \\ Z(x) &\in C(-\infty; +\infty) \cap C^1(-\infty; 0] \cap C^1[0; h] \cap C^1[h; +\infty) \cap \\ &\cap C^2(-\infty; 0) \cap C^2(0; h) \cap C^2(h; +\infty). \end{aligned}$$

Такие условия гладкости следуют из условий непрерывности касательных составляющих поля на границах раздела сред.

Будем искать действительные  $\gamma$ .

## 2. Решение системы дифференциальных уравнений

Для  $\varepsilon = \varepsilon_1$  в полупространстве  $x < 0$  получаем общее решение:

$$X(x) = A \exp\left(x\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}\right),$$

$$Z(x) = \frac{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}{\gamma} A \exp\left(x\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}\right), \quad (7)$$

где принято во внимание условие на бесконечности.

Для  $\varepsilon = \varepsilon_3$  в полупространстве  $x > h$  имеем

$$\begin{aligned} X(x) &= B \exp\left(-(x-h)\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}\right); \\ Z(x) &= -\frac{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}{\gamma} B \exp\left(-(x-h)\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}\right) \end{aligned} \quad (8)$$

в соответствии с условием на бесконечности. В решениях (7) и (8) константы  $A$  и  $B$  будут определяться граничными условиями.

Внутри слоя  $0 < x < h$  система (5) принимает вид

$$\begin{cases} -\frac{d^2 Z}{dx^2} + \gamma \frac{dX}{dx} = \left(\varepsilon_2 + a(X^2 + Z^2)\right)Z, \\ -\frac{dZ}{dx} + \gamma X = \frac{1}{\gamma} \left(\varepsilon_2 + a(X^2 + Z^2)\right)X. \end{cases} \quad (9)$$

Систему (9) можно привести к виду

$$\begin{cases} \frac{dX}{dx} = \frac{2a(\varepsilon_2 - \gamma^2 + a(X^2 + Z^2))X^2 + \gamma^2(\varepsilon_2 + a(X^2 + Z^2))}{\gamma(\varepsilon_2 + 3aX^2 + aZ^2)}Z, \\ \frac{dZ}{dx} = -\frac{1}{\gamma}(\varepsilon_2 - \gamma^2 + a(X^2 + Z^2))X. \end{cases} \quad (10)$$

Из системы (10) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$-(\varepsilon_2 + 3aX^2 + aZ^2) \frac{dX}{dZ} = 2aXZ + \gamma^2 \frac{\varepsilon_2 + a(X^2 + Z^2)}{\varepsilon_2 - \gamma^2 + a(X^2 + Z^2)} \frac{Z}{X}. \quad (11)$$

Уравнение (11) является уравнением в полных дифференциалах, его решение имеет вид

$$aZ^2 + \varepsilon_2 = \frac{\gamma^6 C_1 + 3\gamma^2(\varepsilon_2 + a(X^2 + Z^2))^2 - 2(\varepsilon_2 + a(X^2 + Z^2))^3}{2(\varepsilon_2 + a(X^2 + Z^2))(2\gamma^2 - (\varepsilon_2 + a(X^2 + Z^2)))}. \quad (12)$$

### 3. Граничные условия и краевая задача

Из непрерывности касательных составляющих полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  получаем

$$Z(h) = E_z(h+0) = E_z^{(h)}; \quad Z(0) = E_z(0-0) = E_z^{(0)};$$

$$\gamma X(h) - Z'(h) = i\omega\mu H_y(h+0) = H_y^{(h)}; \quad \gamma X(0) - Z'(0) = i\omega\mu H_y(0) = H_y^{(0)}, \quad (13)$$

где константа  $E_z^{(h)}$  считается известной, и тогда

$$H_y^{(h)} = -E_z^{(h)} \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}, \quad H_y^{(0)} = E_z^{(0)} \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}. \quad (14)$$

Условия сопряжения для компонент поля  $\mathbf{E}$  дают

$$[\varepsilon X]_{x=0} = 0, \quad [\varepsilon X]_{x=h} = 0, \quad [Z]_{x=0} = 0, \quad [Z]_{x=h} = 0, \quad (15)$$

где  $[f(x)]_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$  обозначает скачок функции на границе раздела сред.

Считаем функции  $X(x)$ ,  $Z(x)$  также удовлетворяющими условию

$$X(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right) \text{ и } Z(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right) \text{ при } |x| \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Пусть  $D = \begin{pmatrix} d/dx & 0 \\ 0 & d/dx \end{pmatrix}$  и  $F(X(x), Z(x)) = \begin{pmatrix} X(x) \\ Z(x) \end{pmatrix}$  и

$$G(F, \gamma) = \begin{pmatrix} G_1(F, \gamma) \\ G_2(F, \gamma) \end{pmatrix}, \text{ где } X(x) \text{ и } Z(x) \text{ являются искомыми функциями, а}$$

$G_1$  и  $G_2$  являются правыми частями уравнений системы (10). Число  $\gamma$  является спектральным параметром. Также будем рассматривать вектор-столбец

$$N(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon X(x) \\ Z(x) \end{pmatrix}. \text{ Перепишем задачу, используя введенные обозначения.}$$

Для полупространства  $x < 0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_1$ ,  $N = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 X \\ Z \end{pmatrix}$  получаем

$$\gamma DF - \begin{pmatrix} 0 & \gamma^2 \\ \gamma^2 - \varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix} F = 0. \quad (17)$$

Внутри слоя  $0 < x < h$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_2 + a|\mathbf{E}|^2$ ,  $N = \begin{pmatrix} (\varepsilon_2 + a(X^2 + Z^2))X \\ Z \end{pmatrix}$ , и

система принимает вид

$$L(F, \gamma) \equiv DF - G(F, \gamma) = 0. \quad (18)$$

Для полупространства  $x > h$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_3$ ,  $N = \begin{pmatrix} \varepsilon_3 X \\ Z \end{pmatrix}$  получаем

$$\gamma DF - \begin{pmatrix} 0 & \gamma^2 \\ \gamma^2 - \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix} F = 0. \quad (19)$$

Условия сопряжения (15) приводят к условиям

$$[N(x)]_{x=0} = 0, [N(x)]_{x=h} = 0, \quad (20)$$

что для вектора обозначает скачок каждой компоненты на границе раздела сред.

Сформулируем краевую задачу (задачу сопряжения). Требуется найти ненулевой вектор  $F$  и соответствующие собственные значения  $\gamma$  такие, что  $F$  удовлетворяет уравнениям (17)–(19), условиям сопряжения (20) и компоненты вектора  $F$  удовлетворяют условию (16).

**Определение 1.** Число  $\gamma = \gamma_0$ , при котором существует ненулевое решение  $F$  задачи (17)–(19) при условиях (16) и (20), будем называть собственным значением задачи. Решение  $F$ , которое соответствует собственному значению, будем называть собственным вектором задачи, а компоненты  $X(x)$  и  $Z(x)$  вектора  $F$  – собственными функциями.

*Замечание 1.* Определение 1 является неклассическим аналогом известного определения характеристического числа линейной оператор-функции, нелинейно зависящей от спектрального параметра [15]. Введенное определение 1 является, с одной стороны, распространением классического определения собственного значения на случай нелинейной оператор-функции, нелинейно зависящей от спектрального параметра, с другой стороны, соответствует физической природе задачи.

#### 4. Дисперсионное уравнение

Введем новые переменные:

$$\tau(x) = \frac{\varepsilon_2 + a((X(x))^2 + (Z(x))^2)}{\gamma^2}, \quad \eta(x) = \gamma \frac{X(x)}{Z(x)} \tau(x). \quad (21)$$

Обозначим  $\tau_0 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma^2}$ . Тогда  $X^2 = \frac{\gamma^2 \eta^2 (\tau - \tau_0)}{a \eta^2 + \gamma^2 \tau^2}$ ,  $Z^2 = \frac{\gamma^4 \tau^2 (\tau - \tau_0)}{a \eta^2 + \gamma^2 \tau^2}$ .

Система (10) и уравнение (12) в этих переменных примут вид

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{dx} = 2\gamma^2 \frac{\tau^2 \eta (\tau - \tau_0) (2 - \tau)}{\tau (\eta^2 + \gamma^2 \tau^2) + 2\eta^2 (\tau - \tau_0)}, \\ \frac{d\eta}{dx} = \frac{\gamma^2 \tau^2 + \eta^2 (\tau - 1)}{\tau}; \end{cases} \quad (22)$$

$$\eta^2 = \frac{\gamma^2 \tau^2 (\tau^2 - C_1)}{C_1 + 3\tau^2 - 2\tau^3 - 2\tau(2 - \tau)\tau_0}. \quad (23)$$

Уравнение (23) – алгебраическое уравнение четвертой степени относительно  $\tau$ . Его решение  $\tau = \tau(\eta)$  можно выписать явно по формулам Кардано – Феррари [16].

Отметим, что первый интеграл (12) (или (23) в новых переменных) есть закон сохранения.

*Замечание 2.* Если рассматривать первое уравнение системы (22) совместно с первым интегралом, то это уравнение можно проинтегрировать, и это приведет к так называемым гиперэллиптическим интегралам (это один из простых примеров абелевых интегралов). Если расширить область определения независимого переменного  $x$  на всю комплексную плоскость, то можно рассматривать функции, обратные к этим интегралам, которые и будут решениями системы (22). Это гиперэллиптические функции, принадлежащие классу абелевых функций, которые являются мероморфными периодическими функциями. А поскольку функция  $\eta$  выражается через  $\tau$  алгебраически, то она также является мероморфной периодической функцией [17, 18].

Перейдем к выводу дисперсионного уравнения и необходимых для этого значений  $\tau(h)$ ,  $\eta(0)$  и  $\eta(h)$ .

В соответствии с (6) и (9) в слое

$$-Z'(x) + \gamma X(x) = \frac{1}{\gamma} \left( \varepsilon_2 + a \left( X^2(x) + Z^2(x) \right) \right) X(x). \quad (24)$$

Из (21), (23) и из (13), (24) получаем

$$\frac{X^2(h)}{\left( E_z^{(h)} \right)^2} = \frac{\tau^2(h) - C_1}{C_1 + 3\tau^2(h) - 2\tau^3(h) - 2\tau(h)(2 - \tau(h))\tau_0}; \quad (25)$$

$$\frac{1}{\gamma} \left( \varepsilon_2 + a \left( X^2(h) + \left( E_z^{(h)} \right)^2 \right) \right) X(h) = H_y^{(h)}, \text{ где } X(h) = \frac{H_y^{(h)}}{\gamma\tau(h)} \quad (26)$$

и  $H_y^{(h)}$  определяется по формуле (14).

Из (26) получаем для  $X(h)$

$$X^3(h) + \frac{\varepsilon_2 + a \left( E_z^{(h)} \right)^2}{a} X(h) - \frac{\gamma H_y^{(h)}}{a} = 0. \quad (27)$$

Запишем пока формально  $\tau(h) = \frac{H_y^{(h)}}{\gamma X(h)}$ . Используя (14), найдем

$$X(h) = -\frac{E_z^{(h)}}{\gamma\tau(h)} \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}. \quad (28)$$

Из уравнений (25) и (28) имеем

$$C_1 = \tau^2(h) - \frac{2\varepsilon_3^2\tau(h)(2 - \tau(h))(\tau(h) - \tau_0)}{\varepsilon_3^2 + \gamma^2(\gamma^2 - \varepsilon_3)\tau^2(h)}. \quad (29)$$

Известно, что составляющие электромагнитного поля  $\epsilon X(x)$  и  $Z(x)$  непрерывны на границе раздела сред. Тогда функция  $\eta(x)$  также непрерывна на границе раздела сред в точках  $x$  таких, что  $Z(x) \neq 0$ . Тогда, используя (7) и (8), имеем

$$\eta(0) = \frac{\epsilon_1}{\sqrt{\gamma^2 - \epsilon_1}} > 0; \quad \eta(h) = -\frac{\epsilon_3}{\sqrt{\gamma^2 - \epsilon_3}} < 0. \quad (30)$$

Обозначим  $f \equiv f(\eta) = \frac{\tau}{\gamma^2 \tau^2 + \eta^2 (\tau - 1)}$  (ср. с правой частью второго уравнения в (22)),  $\tau = \tau(\eta)$  выражается из уравнения (23).

Тогда можно проинтегрировать второе уравнение системы (22). Но мы не можем получить решение на всем интервале, поскольку функция  $\eta(x)$  может обращаться в бесконечность в некоторых точках интервала  $(0, h)$ . Из замечания 2 ясно, что функция  $\eta(x)$  является мероморфной. Поэтому точки разрыва могут быть только второго рода.

Пусть функция  $\eta(x)$  на интервале  $(0, h)$  имеет несколько точек  $x_0, x_1, \dots, x_N$ , в которых она обращается в бесконечность.

Ниже будет доказано, что число таких точек конечно для любого  $h$ .

Будем искать решения на каждом отрезке  $[0, x_0]$ ,  $[x_0, x_1]$ , ...,  $[x_N, h]$ :

$$\begin{aligned} & - \int_{\eta(x)}^{\eta(x_0-0)} f d\eta = x + c_0, \quad 0 \leq x \leq x_0; \\ & \int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x)} f d\eta = x + c_{i+1}, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad \text{где } i = \overline{0, N-1}; \\ & \int_{\eta(x_N+0)}^{\eta(x)} f d\eta = x + c_{N+1}, \quad x_N \leq x \leq h. \end{aligned} \quad (31)$$

Из уравнений (31), подставляя  $x = 0$ ,  $x = x_{i+1}$ ,  $x = x_N$  в первое, второе и третье уравнения (31), найдем необходимые константы  $c_1, c_2, \dots, c_{N+1}$ :

$$\begin{aligned} c_0 &= - \int_{\eta(0)}^{\eta(x_0-0)} f d\eta; \\ c_{i+1} &= \int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x_{i+1}-0)} f d\eta - x_{i+1}, \quad \text{где } i = \overline{0, N-1}; \end{aligned}$$

$$c_{N+1} = \int_{\eta(x_N+0)}^{\eta(h)} f d\eta - h. \quad (32)$$

С учетом (32) уравнения (31) примут вид

$$\int_{\eta(x)}^{\eta(x_0-0)} f d\eta = -x + \int_{\eta(0)}^{\eta(x_0-0)} f d\eta, \quad 0 \leq x \leq x_0;$$

$$\int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x)} f d\eta = x + \int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x_{i+1}-0)} f d\eta - x_{i+1}, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad \text{где } i = \overline{0, N-1};$$

$$\int_{\eta(x_N+0)}^{\eta(x)} f d\eta = x + \int_{\eta(x_N+0)}^{\eta(h)} f d\eta - h, \quad x_N \leq x \leq h. \quad (33)$$

Из формул (33) получаем, что

$$x_{i+1} - x_i = \int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x_{i+1}-0)} f d\eta, \quad \text{где } i = \overline{0, N-1}. \quad (34)$$

Поскольку  $0 < x_{i+1} - x_i < h < \infty$ , то отсюда следует, что при наших предположениях (относительно наличия особых точек) интеграл справа сходится и  $\int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x_{i+1}-0)} f d\eta > 0$ . Таким же образом из первого и последнего уравнений (33) получаем

$$x_0 = \int_{\eta(0)}^{\eta(x_0-0)} f d\eta, \quad \text{так как } 0 < x_0 < h, \quad \text{то } 0 < \int_{\eta(0)}^{\eta(x_0-0)} f d\eta < h < \infty;$$

$$h - x_N = \int_{\eta(x_N+0)}^{\eta(h)} f d\eta, \quad \text{так как } 0 < h - x_N < h, \quad \text{то } 0 < \int_{\eta(0)}^{\eta(x_0-0)} f d\eta < h < \infty.$$

Из этих рассуждений следует, что функция  $\eta(x)$  имеет конечное число точек разрыва, и функция  $f(\eta)$  не имеет неинтегрируемых особенностей при  $\eta \in (-\infty, \infty)$ .

Теперь, полагая в уравнениях (33)  $x$  таковым (т.е. подставляя  $x = x_0$ ,  $x = x_i$ ,  $x = x_N$  в первое, второе и третье уравнения (33)), чтобы все интегралы слева обратились в нуль, сложим все уравнения (33), получим

$$\begin{aligned}
 0 = -x_0 + \int_{\eta(0)}^{\eta(x_0-0)} f d\eta + x_0 + \int_{\eta(x_0+0)}^{\eta(x_1-0)} f d\eta - x_1 + \dots \\
 \dots + x_{N-1} + \int_{\eta(x_{N-1}+0)}^{\eta(x_N-0)} f d\eta - x_N + x_N + \int_{\eta(x_N+0)}^{\eta(h)} f d\eta - h. \quad (35)
 \end{aligned}$$

Из (35) получаем

$$\int_{\eta(0)}^{\eta(x_0-0)} f d\eta + \int_{\eta(x_N+0)}^{\eta(h)} f d\eta + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x_{i+1}-0)} f d\eta = h. \quad (36)$$

Из формулы (34) следует, что

$$\eta(x_i + 0) = \pm\infty \text{ и } \eta(x_i - 0) = \mp\infty, \text{ где } i = \overline{0, N},$$

причем ясно, что бесконечности должны выбираться различных знаков.

$$\text{Таким образом, получаем, что } \int_{\eta(x_0+0)}^{\eta(x_1-0)} f d\eta = \dots = \int_{\eta(x_{N-1}+0)}^{\eta(x_N-0)} f d\eta \equiv T \text{ и, зна-}$$

чит,  $x_1 - x_0 = \dots = x_N - x_{N-1}$ .

Теперь уравнение (36) можно переписать так:

$$\int_{\eta(0)}^{\eta(x_0-0)} f d\eta + \int_{\eta(x_N+0)}^{\eta(h)} f d\eta + NT = h \text{ или } - \int_{\eta(h)}^{\eta(0)} f d\eta + (N+1)T = h, \quad (37)$$

где  $\eta(0)$ ,  $\eta(h)$  определяются формулами (30),  $N \geq 0$  – целое число.

Формула (37) есть дисперсионное уравнение, справедливое для любого  $h$ . Отметим, что когда  $N \neq 0$ , то возникает несколько уравнений при различных значениях  $N$ . Необходимо решать относительно  $\gamma$  каждое из получающихся уравнений.

Из замечания 2 и вывода дисперсионного уравнения (37) следует, что точки разрыва  $x_i$ ,  $i = \overline{0, N}$ , являются полюсами функции  $\eta$ . Интеграл, стоящий в уравнении (37), является более общим абелевым интегралом [17, 18].

*Замечание 3.* Интегралы  $\int_A^{+\infty} f d\eta$  и  $\int_{-\infty}^{-A} f d\eta$ , где  $A > 0$  – постоянная, сходятся в силу того, что функцию  $f$  при достаточно больших  $\eta$  можно мажорировать функцией  $\frac{M}{(m-1)\eta^2}$ , где  $M = \max_{x \in [0, h]} \tau(x)$ , а  $m = \min_{x \in [0, h]} \tau(x) > 1$ . То

что функция  $\tau(x)$  имеет конечные минимум и максимум, ясно из ограниченности функций  $X(x)$  и  $Z(x)$ .

*Замечание 4.* Рассмотрим систему (22). Ранее, в работах [8–10], при условии  $M$ , где

$$M := \left\{ a > 0, \varepsilon_1 > \varepsilon_0, \varepsilon_3 > \varepsilon_0, \varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \gamma^2 < \varepsilon_2 \right\}, \quad (38)$$

из системы (22) было получено дисперсионное уравнение для постоянных распространения. Использование условия  $M$  приводит к тому, что правая часть второго уравнения (22) положительна, следовательно, функция  $\eta(x)$  – возрастающая при  $x \in (0, h)$ . Поскольку  $\eta(0) > 0$ ,  $\eta(h) < 0$ , то  $\eta$  необходимо имеет точку разрыва. Предполагая, что на интервале  $(0, h)$  содержится несколько  $(N+1)$  точек разрыва  $x_0, \dots, x_N$ , мы получаем дисперсионное уравнение, которое имеет такой же вид, как (37).

При выводе дисперсионного уравнения (37) мы попутно показали, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau d\eta}{\gamma^2 \tau^2 + \eta^2 (\tau - 1)}$$

сходится (где  $\tau = \tau(\eta)$  находится из первого интеграла). Однако подынтегральная функция может иметь особенности на промежутке интегрирования. Знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль, если  $\gamma^2 \tau^2 + \eta^2 (\tau - 1) = 0$ . Пусть  $\eta = \eta^*$  – решение последнего уравнения. Тогда поскольку  $\eta^*$  – постоянная, то  $\tau^* = \tau(\eta^*)$  тоже постоянная. Подставляя  $\tau^*$ ,  $\eta^*$  в (22) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2\gamma^2 \frac{\tau^2 \eta (\tau - \tau_0) (2 - \tau)}{\tau (\eta^2 + \gamma^2 \tau^2) + 2\eta^2 (\tau - \tau_0)} = 0, \\ \frac{\gamma^2 \tau^2 + \eta^2 (\tau - 1)}{\tau} = 0. \end{cases} \quad (39)$$

Решения системы (39) называются стационарными точками системы (22) (см., например, [19]).

Имеем четыре пары решений  $(\tau, \eta)$  системы (39):  $(\tau^*, 0)$ ,  $(0, \eta^*)$ ,  $(\tau_0, \eta^*)$ ,  $(2, \eta^*)$ . Пусть пока  $(\tau^*)^2 + (\eta^*)^2 \neq 0$ . Далее получаем, что при  $\tau \equiv \tau^* \neq 0$  и  $\eta \equiv 0$  второе уравнение не удовлетворяется; пара  $\tau \equiv 0$ ,  $\eta \equiv \eta^* \neq 0$  также не удовлетворяет второму уравнению; пара  $\tau \equiv \tau_0$  и  $\eta \equiv \eta^*$  дает  $(\eta^*)^2 \equiv \frac{\gamma^2 \tau_0^2}{1 - \tau_0}$ ; пара  $\tau \equiv 2$ ,  $\eta \equiv \eta^*$  дает  $(\eta^*)^2 \equiv -4\gamma^2$ . Поскольку мы ищем действительные  $\eta$  и действительные  $\gamma$ , то последняя точка также не удовлетворяет второму уравнению.

Таким образом, только случай  $\tau \equiv \tau_0$ ,  $(\eta^*)^2 \equiv \frac{\gamma^2 \tau_0^2}{1 - \tau_0}$  требует более тщательного анализа. Из первого условия следует, что  $\frac{\varepsilon_2 + a(X^2 + Z^2)}{\gamma^2} \equiv \frac{\varepsilon_2}{\gamma^2}$  или  $a(X^2 + Z^2) \equiv 0$ . Отсюда следует, что либо  $a = 0$  (известный линейный случай [20, 21]), либо  $X \equiv 0$ ,  $Z \equiv 0$  (тривиальное решение, что не представляет интереса).

Остается только случай  $\tau^* \equiv 0$ ,  $\eta^* \equiv 0$ . Замена переменных (21) невозможна в этом случае. Рассмотрим системы (10) в переменных  $X$  и  $Z$ . Из того, что  $\tau \equiv 0$ , следует, что  $\varepsilon_2 + a(X^2 + Z^2) \equiv 0$ . Обратимся к первому интегралу в форме (12). Из него (после использования полученного соотношения) получаем  $\gamma^6 C_1 = 0$ . Тогда, либо  $C_1 = 0$ , либо  $\gamma = 0$ . Но  $C_1$  находится из граничных условий и лишь в исключительных случаях, быть может, принимает значение 0. Этот случай легко исследовать. При условии  $\varepsilon_2 + a(X^2 + Z^2) \equiv 0$  из формул (15) для компоненты  $X$  получается в этом случае  $\varepsilon_1 X(0 - 0) = 0$ ,  $\varepsilon_3 X(h + 0) = 0$ . Из этого и формул (7) и (8) следует, что  $A = 0$ ,  $B = 0$ . Иными словами, в этом случае у нас получается тривиальное решение  $X \equiv 0$ ,  $Z \equiv 0$ . В случае  $\gamma = 0$  точно так же получаем, что  $A = 0$ ,  $B = 0$ . Таким образом, получаем, что  $C_1 \neq 0$  и  $\gamma \neq 0$ , и этот случай не реализуется.

*Замечание 5.* Возможно, что функция  $\eta \equiv \eta(x)$  в каких-то точках  $x = x^*$  принимает значения такие, что правая часть второго уравнения системы (22) обращается в нуль в этих точках, т.е.  $\eta^2 = \frac{\gamma^2 \tau^2}{1 - \tau}$ . Подставим это выражение в первый интеграл (23), мы получаем  $(\tau - 2)(\tau^2 - 2\tau_0\tau + C_1) = 0$ , где  $C_1$  определяется выражением (29). Ранее мы разобрали невозможность случая  $\tau = 2$ . Таким образом, лишь в точках  $x = x^*$  таких, что  $\tau(x^*) = \tau_0 \pm \sqrt{\tau_0^2 - C_1}$ ,  $\tau < 1$  и  $\tau_0^2 - C_1 \geq 0$  правая часть второго уравнения системы (22) обращается в нуль. Заметим, что мы не утверждаем существование таких точек  $x = x^*$ . Однако, даже если такие точки существуют, то они, как мы доказали при выводе дисперсионного уравнения, не являются неинтегрируемыми особенностями.

### 5. Теоремы об эквивалентности

Ранее при условии  $M$  (38) в работе [8] была доказана теорема об эквивалентности решений краевой задачи на собственные значения (17)–(19) и решений дисперсионного уравнения (37). Другими словами, множество решений краевой задачи на собственные значения совпадало с множеством решений дисперсионного уравнения. Здесь мы можем доказать лишь ослабленный вариант этой теоремы.

Как видно из формулы (27), при произвольных знаках  $\varepsilon_2$  и  $a$  уравнение (27) может иметь один или три действительных корня. Если оно имеет один действительный корень (это справедливо в частности при  $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ ,  $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_3 > \varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума и  $a > 0$ ), то его мы и рассматриваем, если же три действительных корня, то, вообще говоря, необходимо все последующие вычисления проводить для каждого корня.

**Теорема 1.** *Множество решений краевой задачи на собственные значения (17)–(19) с условиями (16) и (20) содержится в множестве решений дисперсионного уравнения (37).*

**Доказательство.** Пусть  $\gamma$  – решение дисперсионного уравнения (37), мы можем найти функции  $\tau(x)$  и  $\eta(x)$  из системы (22) и первого интеграла (23). Зная функции  $\tau(x)$  и  $\eta(x)$  и пользуясь формулами (21), найдем

$$X(x) = \pm \gamma \eta \sqrt{\frac{1}{a} \frac{\tau - \tau_0}{\eta^2 + \gamma^2 \tau^2}} \quad \text{и} \quad Z(x) = \pm \gamma^2 \tau \sqrt{\frac{1}{a} \frac{\tau - \tau_0}{\eta^2 + \gamma^2 \tau^2}}. \quad (40)$$

Вопрос о выборе знака является существенным, и поэтому остановимся на нем подробнее. Нам известно поведение функций  $\eta = \gamma \tau \frac{X}{Z}$  и  $\tau$ . Из краевых условий следует, что  $Z(h) = E_z^{(h)}$  (например,  $> 0$ ). Учтем, что если функции  $\eta$  и  $\tau$  имеют одинаковые знаки, то и функции  $X$  и  $Z$  имеют одинаковые знаки, а если функции  $\eta$  и  $\tau$  имеют разные знаки, тогда и функции  $X$  и  $Z$  имеют разные знаки. Помня о том, что  $X$  и  $Z$  – гладкие функции, выбираем соответствующие знаки в выражениях (40).

Теперь, зная значение  $\gamma$  и функцию  $X(x)$ , мы находим значение  $X(h)$ . Если найденное таким образом значение  $X(h)$  совпадает с найденным из уравнения (27), то полученное  $\gamma$  – собственное значение краевой задачи. В противном случае полученное  $\gamma$  не является собственным значением краевой задачи и при решении дисперсионного уравнения (37) необходимо выбирать другое решение уравнения (27).

Теперь пусть  $\gamma$  – собственное значение краевой задачи. Из способа получения дисперсионного уравнения (37) из системы (22) следует, что собственное значение краевой задачи является решением дисперсионного уравнения. #

Как видно из доказательства, более широкое множество решений дисперсионного уравнения (37) получается именно за счет того, что уравнение (27) может иметь несколько действительных корней. В случае, если уравнение (27) имеет только один корень, подходящий по условию задачи (например, единственный действительный корень), то получается

**Теорема 2** (об эквивалентности). *Если уравнение (27) имеет единственный удовлетворяющий условию задачи корень, то краевая задача (17)–(19) с условиями (16) и (20) имеет решение – собственное значение тогда и только тогда, когда это собственное значение является решением дисперсионного уравнения (37).*

Доказательство следует из доказательства теоремы 1.

*Замечание 6.* Пояснение к формулировке теоремы 2. Разумеется, уравнение (27) имеет единственный корень, удовлетворяющий условию краевой задачи. Однако, вообще говоря, мы можем это выяснить только после того, как найдем собственное значение. Ибо если указанное уравнение имеет три действительных корня, то без дополнительных предположений мы не можем сразу выбрать нужный корень и приходится решать дисперсионное уравнение для каждого из таких корней.

Также необходимо заметить, что собственные функции, отвечающие собственному значению  $\gamma_0$ , легко могут быть найдены численно из системы (11), например, методом Рунге – Кутты.

### 6. Предельный переход к случаю линейной среды в слое

Рассмотрим предельный переход при  $a \rightarrow 0$  к случаю линейной среды в слое. Здесь возможны два случая, а именно: а)  $\varepsilon_2 > 0$  и  $a \rightarrow 0$ ; б)  $\varepsilon_2 < 0$  и  $a \rightarrow 0$  (случай метаматериала).

Рассмотрим первый случай. Здесь дисперсионное уравнение для случая линейной среды в слое известно и при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$  приведено в [20], а в случае произвольных  $\varepsilon_1, \varepsilon_3$  – в работе [21]. При произвольных  $\varepsilon_1, \varepsilon_3$  выглядит оно так:

$$\operatorname{tg}\left(h\sqrt{\varepsilon_2 - \gamma^2}\right) = \frac{\varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_2 - \gamma^2}\left(\varepsilon_1\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3} + \varepsilon_3\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}\right)}{\varepsilon_1\varepsilon_3\left(\varepsilon_2 - \gamma^2\right) - \varepsilon_2^2\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}. \quad (41)$$

В этом случае из самого вывода дисперсионного уравнения (41) следует, что  $\varepsilon_2 - \gamma^2 > 0$  (вывод см. в [21]). Рассмотрим функции

$$f = \frac{\tau}{\gamma^2\tau^2 + \eta^2(\tau - 1)}, \quad f_1 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \gamma^2} \frac{1}{\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_2 - \gamma^2} + \eta^2}.$$

Функция  $f_1$  получилась из  $f$  формальным предельным переходом при  $a \rightarrow 0$  по переменной  $\tau$ . Так как мы ищем действительные решения  $X(x)$  и  $Z(x)$ , знаменатель функции  $f_1$  не может обратиться в нуль. Используя результаты классического анализа, можно показать, что можно перейти к пределу при  $a \rightarrow 0$  под знаком интеграла в (37). Вычислив интегралы от функции  $f_1$  получим из (37)

$$h\sqrt{\varepsilon_2 - \gamma^2} = \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_2 - \gamma^2}\left(\varepsilon_1\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3} + \varepsilon_3\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}\right)}{\varepsilon_1\varepsilon_3\left(\varepsilon_2 - \gamma^2\right) - \varepsilon_2^2\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}} + (N + 1)\pi.$$

Взяв тангенс от последнего выражения, получим (41).

Во втором случае  $\varepsilon_2 < 0$  (метаматериал [5–7]) и дисперсионное уравнение для случая линейной среды в слое выглядит так (вывод см. в [21]):

$$\frac{\varepsilon_1 \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_2} - \varepsilon_2 \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}{\varepsilon_1 \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_2} + \varepsilon_2 \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}} \cdot \frac{\varepsilon_3 \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_2} - \varepsilon_2 \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}{\varepsilon_3 \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_2} + \varepsilon_2 \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}} = e^{2h\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_2}}, \quad (42)$$

где  $\gamma^2 - \varepsilon_1 \geq 0$ ,  $\gamma^2 - \varepsilon_2 \geq 0$ ,  $\gamma^2 - \varepsilon_3 \geq 0$ .

Так же как и раньше, переходя к пределу при  $a \rightarrow 0$ , в функции  $f$  получаем  $f_2 = \frac{|\varepsilon_2|}{\gamma^2 - \varepsilon_2} \frac{1}{\eta^2 - \frac{\varepsilon_2^2}{\gamma^2 - \varepsilon_2}}$ . Переходя к указанному пределу в уравне-

нии (37) и вычисляя интегралы от функции  $f_2$ , получаем

$$-\ln \left| \frac{\eta - \frac{|\varepsilon_2|}{\gamma^2 - \varepsilon_2}}{\eta + \frac{|\varepsilon_2|}{\gamma^2 - \varepsilon_2}} \right| \Bigg|_{\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}}^{\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}} + (N+1) \ln \left| \frac{\eta - \frac{|\varepsilon_2|}{\gamma^2 - \varepsilon_2}}{\eta + \frac{|\varepsilon_2|}{\gamma^2 - \varepsilon_2}} \right| \Bigg|_{-\infty}^{\infty} = 2h\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_2}.$$

Множитель перед  $(N+1)$  очевидно дает нуль. Проводя остальные вычисления и затем потенцируя, получаем формулу (42).

Результаты этого параграфа показывают, что при переходе к пределу при  $a \rightarrow 0$  мы получаем регулярный случай. В пределе дисперсионное уравнение (37) для случая нелинейной среды в слое переходит в дисперсионное уравнение (41) или (42) для случая линейной среды в слое. Уравнение (41) является классическим в электродинамике и хорошо известно.

Отметим, что рассмотренный в этом разделе метод отыскания дисперсионного уравнения применим и к более общей задаче – к задаче распространения ТМ-волны в нелинейном анизотропном слое с керровской нелинейностью. Постановка задачи отличается только тем, что диэлектрическая проницаемость в слое в этом случае описывается диагональным тензором вида

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix},$$

где  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{12} + b|E_x|^2 + a|E_z|^2$ ,  $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{21} + a|E_x|^2 + b|E_z|^2$ ,  $a, b, \varepsilon_{12} > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$  и  $\varepsilon_{21} > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$  (при  $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$  и  $a = b$  мы получаем разобранный в этой статье случай). Здесь после записи системы уравнений в терминах функций  $X(x)$  и  $Z(x)$  в качестве переменных  $\tau(x)$  и  $\eta(x)$  следует взять переменные

$$\tau(x) = \frac{\varepsilon_{12} + bX^2 + aZ^2}{\gamma^2} \text{ и } \eta(x) = \gamma\tau \frac{X}{Z}, \text{ где } X = X(x) \text{ и } Z = Z(x).$$

Анизотропный случай, когда  $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_2$ , разобран в [11].

**Список литературы**

1. **Шатров, А. Д.** О разрешимости задач возбуждения плоскостойких сред из метаматериалов / А. Д. Шатров // Радиотехника и электроника. – 2007. – Т. 52. – № 8. – С. 909–916.
2. **Шатров, А. Д.** Электродинамический анализ линзы Пендри / А. Д. Шатров // Радиотехника и электроника. – 2007. – Т. 52. – № 12. – С. 1430–1435.
3. **Шевченко, В. В.** К волновой теории плоской линзы из отрицательного материала / В. В. Шевченко // Радиотехника и электроника. – 2008. – Т. 53. – № 9. – С. 1121–1127.
4. **Банков, С. Е.** Аналитическое исследование фокусировки электромагнитного поля линзой Веселаго / С. Е. Банков // Радиотехника и электроника. – 2009. – Т. 54. – № 2. – С. 133–143.
5. **Solymar, L.** Waves in Metamaterials / L. Solymar, E. Shamonina. – Oxford : Oxford University Press, 2009.
6. **Marques, R.** Metamaterials with Negative Parameters. Theory, Design, and Microwave Applications / R. Marques, F. Martin, M. Sorolla. – Hoboken, New Jersey : John Wiley & Sons Inc., 2008.
7. URL. – [www.uniphy.com](http://www.uniphy.com)
8. **Валовик, Д. В.** О существовании решений нелинейной краевой задачи на собственные значения для ТМ-поляризованных электромагнитных волн / Д. В. Валовик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 2 – С. 86–94.
9. **Валовик, Д. В.** О распространении ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое с нелинейностью, выраженной законом Керра / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48. – № 12. – С. 2186–2194.
10. **Валовик, Д. В.** Расчет постоянных распространения ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // Радиотехника и электроника. – 2008. – Т. 53. – № 8. – С. 934–940.
11. **Валовик, Д. В.** Расчет постоянных распространения и полей для поляризованных электромагнитных ТМ-волн в нелинейном анизотропном слое / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // Радиотехника и электроника. – 2009. – Т. 54. – № 4. – С. 411–417.
12. **Смирнов, Ю. Г.** Распространение электромагнитных волн в цилиндрических волноводах, заполненных нелинейной средой / Ю. Г. Смирнов, С. Н. Куприянова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. Т. 44. – № 10. – С. 1850–1860.
13. **Смирнов, Ю. Г.** Численное решение задачи о распространении электромагнитных ТМ-волн в круглых диэлектрических волноводах, заполненных нелинейной средой / Ю. Г. Смирнов, Э. А. Хорошева, М. Ю. Медведик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 1 – С. 2–13.
14. **Eleonskii, P. N.** Cylindrical Nonlinear Waveguides / P. N. Eleonskii, L. G. Oganets'ants, V. P. Silin // Soviet Physics JETP. – 1972. – V. 35. – № 1. – P. 44–47.
15. **Гохберг, И. Ц.** Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. – М. : Наука, 1965.
16. **Корн, Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1968.
17. **Бейкер, Г. Ф.** Абелевы функции. Теорема Абеля и связанная с ней теория тэта-функций / Г. Ф. Бейкер. – М. : МЦНМО, 2008.
18. **Риман, Б.** Сочинения / Б. Риман. – М. : ГИТТЛ, 1948.
19. **Хартман, Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М. : Мир, 1970.

20. **Snyder, A.** Optical Waveguide Theory / A. Snyder, J. Love. – Chapman and Hall. – London, 1983.
21. **Валовик, Д. В.** Дисперсионные уравнения в задаче о распространении электромагнитных волн в линейном слое и метаматериалы / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 1 – С. 28–42.

---

**Валовик Дмитрий Викторович**

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра математики  
и суперкомпьютерного моделирования,  
Пензенский государственный  
университет

E-mail: dvalovik@mail.ru

**Valovik Dmitry Viktorovich**

Candidate of physical and mathematical  
sciences, associate professor,  
sub-department of mathematics  
and supercomputer modeling,  
Penza State University

**Смирнов Юрий Геннадьевич**

доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой  
математики и суперкомпьютерного  
моделирования, Пензенский  
государственный университет

E-mail: mmm@pnzgu.ru

**Smirnov Yuri Gennadyevich**

Doctor of physical and mathematical  
sciences, professor, head of sub-department  
of mathematics and supercomputer  
modeling, Penza State University

---

УДК 517.958; 517.927.4

**Валовик, Д. В.**

**Распространение ТМ-поляризованных электромагнитных волн в диэлектрическом слое из нелинейного метаматериала / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 3 (15). – С. 71–87.**